

## Matematyczne modelowanie kształtu pater do owoców, tortów i ciastek

### Streszczenie

*W pracy zaproponowano metodę matematycznego modelowania kształtu pater do owoców, tortów i ciastek. Modele brył pater zbudowano ze złożenia - opisanych matematycznie - powierzchni obrotowych miski, talerza, stopek i ścian bocznych. Linie konturu miski, talerza i stopek opisano wielomianami trzeciego stopnia (krzywymi Béziera). Do opisu ścianek bocznych miski, talerza i stopek zastosowano parametryczne równania cylindra. Po zastosowaniu skalowania i przesunięć poszczególne modelowane powierzchnie umieszczono w przestrzeni, tworząc modele 3D pater.*

**Słowa kluczowe:** patera, kształt, modele 3D, matematyczne modelowanie

### Mathematical modeling of the shape of the centrepieces to fruit, cakes and pastries

### Summary

*This paper proposes a method of mathematical modeling of the shape of the centrepieces to fruit, cakes and pastries. Models centrepieces constructed from the assembly, described mathematically rotating surface of the bowl, plate, feet and side walls. Contour lines of the bowl, plate and footers, described third-degree polynomials (Bezier curves). To describe the side walls of the bowl, plate and footers used parametric equation of the cylinder were used. After applying scaling and offsets each modeled surfaces were placed in the space to create 3D models centrepieces.*

**Key words:** centrepieces, shape, 3D models, mathematical modeling

### Wprowadzenie

Ceramika była znana od najdawniejszych czasów. Historia naczyń stołowych sięga cywilizacji kreteńskiej, greckiej, etruskiej i rzymskiej. Powstawały wyroby garncarskie, fajansowe, kamionkowe, porcelanowe, szklane i inne. O ich walorach praktycznych, użytkowych, artystycznych decydował, oprócz ornamentyki i zdobienia, kształt. Podstawowe naczynia wykonywano w gospodarstwach domowych ręcznie lub na kole garncarskim. Wytwarzano gliniane miski do owoców, półmiski, talerze, kubki z uchwytyami (www.foodhabits.eu). Zmieniały się ich kształty i surowce, z których je wykonywano. Od średniowiecza do XVIII – XIX wieku w przemyśle szklarskim głównym składnikiem do tworzenia porcelany i produkcji naczyń kuchennych oraz stołowych był cyno-olów. W XIV - XVI wieku produkcję naczyń podejmowały cechy rzemieślnicze. Po 1872 roku zostały one przekształcone w spółdzielnie.

W Europie na początku XVIII wieku pojawiła się porcelana, znana już Chińczykom w trzecim wieku przed naszą erą. Przezroczyste pojemniki wytwarzali Fenicjanie, którzy wynaleźli szkło. W Europie w XIX wieku zaczęła rozwijać się masowa, seryjna produkcja ceramiki. Zaczęto bowiem stosować seryjne modele, szablony, formy. Przemysł szklarski na ziemiach polskich jest znany od XV - XVI wieku. Rozkwit tego przemysłu przypada na lata 1960-1980. Na terenie Polski działało około sto przedsiębiorstw wytapiających rocznie ok. 2,6t szkła. Pod względem produkcji przeważają opakowania szklane (Sitko i Szczęśniak, 2014; Rząsa, 2007; Ziemia, 2001). W ostatnich latach wytwarzanie naczyń szklanych było głównie skierowane na produkcję o zmniejszonej masie i na większe uatrakcyjnienie wzorów i ich kształtów. Kolejnym czynnikiem warunkującym

rozwój przedsiębiorstw produkujących naczynia było zastosowanie nowoczesnych metod projektowania i technologii wykonania (Dems i Radaszewska, 2008; Wybieralski, 2012).

Istotną cechą współcześnie produkowanych seryjnie naczyń jest nowa i oryginalna ich postać, przejawiająca się interesującym dla klienta kształtem, układem linii, kolorystyką oraz ornamentyką (Bany-Kozłowska i Amborska, 2011). Według Geffroy (1996) i Dłubakowskiej-Puzio (2010), czynnikiem dynamizującym działalność firmy są potrzeby i oczekiwania klientów. W XIX wieku nastąpiła konsolidacja wykorzystania zestawów naczyń, jako serwisów składających się z podobnych elementów. Z badań Zabrockiego i Cordice (2010) wynika, że np. konsumenci angielscy w zakresie usług gastronomicznych zwracają szczególną uwagę na wystrój lokalu, formę naczyń, a także renomę zakładu. Usługi gastronomiczne, jak twierdzi Gheribi (2013), należą do najstarszych i jednocześnie najbardziej dynamicznie rozwijających się form działalności usługowej. W Polsce liczba placówek gastronomicznych w 2011 roku wynosiła 67 954. Rozwój ten generuje również rozwój produkcji naczyń chronionych wzorami przemysłowymi (Wąsikowski i Wąsikowski, 2012; Bany-Kozłowska i Amborska, 2011) Współczesny rozwój turystyki (Lipianin-Zontek i Zontek, 2010), tworzącej konkurencyjność na rynku usług gastronomicznych, wymusza na przedsiębiorcach umiejętność wyprodukowania i dostarczenia klientowi produktu o wysokich walorach jakościowych. Przykładem szerokiej oferty sprzedawanych produktów tylko w jednej fabryce naczyń kamionkowych w Polsce (Milewska, 2007; Zabrocki i Cordice, 2010) jest licząca ponad 150 tys. produkcja wyrobów o dużej różnorodności kształtów (437 produkowanych w 250 wzorach) i zdobień mających

niejednokrotnie elementy wymagające stosowania nowoczesnych technik komputerowych wspomagających decyzje projektowe. Przykładowo chronionymi przez prawo wynalazcze istotnymi cechami patery jest postać płaskiego, okrągłego talerza z wywiniętym i zaokrąglonym rantem, zaopatrzonego w nogę stanowiącą podstawę patery. Talerz tej patery jest zaopatrzony w odlewany ornament w postaci kwiatów z listkami, który jest rozmieszczony na całej jego powierzchni (Wąsikowski i Wąsikowski, 2012).

Z analizy ofert wielu firm ([www.hefra.pl](http://www.hefra.pl), [www.vox.pl](http://www.vox.pl), [www.selgros.pl](http://www.selgros.pl)) wynika, że współczesne naczynia stołowe, w tym i patery, charakteryzują się różnorodnością kształtów. Dynamiczny rozwój programów komputerowych do wspomagania obliczeń numerycznych, np. Matlab, Mathcad, Maple, Mathematica, umożliwia matematyczne modelowanie powierzchni rzeczywistych obiektów, w tym naczyń stosowanych w gastronomii. Trzeba podkreślić, że w inżynierii żywności coraz szersze zastosowanie znajduje grafika komputerowa. Komputerowe wspomaganie projektowania, a szczególnie symulacji i animacji procesów, w których zmienia się w czasie wiele zmiennych, stanowi podstawowe narzędzie współczesnego projektanta. Modele geometryczne, tworzone wykresy linii 2D i 3D są wizualizowane za pomocą metod zaliczanych do grafiki komputerowej. Modele powierzchni zewnętrznych brył reprezentujących kształty naczyń stołowych itp. mają dużą wartość poznawczą, są szczególnie przydatne do numerycznego badania wielu procesów roboczych, np. pakowania, przechowywania (Soltani i in., 2010; Wei-long i in., 2011; Cășandriou i Mieila, 2010), a także poszukiwania kształtu linii modelowanych naczyń. Zapisem kształtu geometrycznego modeli 3D obiektów interesują się projektanci naczyń stołowych wykorzystywanych w przemyśle spożywczym. Kształty obiektów naczyń są różnorodne, często podyktowane modą, stylem oraz upodobaniami estetycznymi klientów. Nie można ich reprezentować za pomocą regularnych form geometrycznych, jak: kula, elipsoida, cylinder, sześcian itp. (Boac i in., 2010). Przedstawienie brył w formie dyskretnej ma duże znaczenie we wstępnej fazie projektowania naczyń, zwłaszcza podczas opracowywania wielu koncepcji. Połączone punkty modelowanej powierzchni dyskretnej tworzą wielokątną siatkę będącą zbiorem połączonych trójkątów ukośnokątych. Modele powierzchni reprezentują współrzędne punktów, odcinków i krzywych w układach 2D i 3D, za pomocą których, definiuje się kształty modelowanych obiektów z przypisanymi im atrybutami. W modelowaniu matematycznym kształtów obiektów mają zastosowanie krzywe i powierzchnie Béziera. Odgrywają one znaczącą rolę w komputerowym wspomaganie projektowania (CAD), dlatego ich specyfikacją, modyfikacją i poznaniem ich właściwości są zainteresowani projektanci (Juhász, 2000). Twórcą krzywych wielomianowych był Pierre Bézier, francuski inżynier i matematyk (Hebisz, 2002; Rabut, 2002). Według Prusakowskiego i in. (2002), podczas modelowania złożonych pod względem kształtu obiektów 3D korzystne jest użycie reprezentacji krzywoliniowej, gdyż umożliwia ona opis kształtów przy zastoso-

waniu małej liczby parametrów. Kiciak (2002; 2005) wyraża pogląd, że można skonstruować linię 2D i 3D za pomocą krzywej Béziera  $p(t)$ . Realizacja projektu obiektu 3D za pomocą systemów CAD w przestrzeni cyfrowej ma zastosowanie do analiz statycznych i dynamicznych, od najprostszych przekształceń do złożonych animacji (Januszkiewicz, 2012; Foley i in., 1995). Mieszkalski (2014) zaproponował zastosowanie krzywych Béziera do modelowania kształtu obiektów biologicznych, znamienych różnorodnością niepowtarzających się kształtów. Krzywe Béziera są wykorzystywane w takich programach komputerowych, jak: CorelDRAW, Adobe Illustrator, Solid Edge, Solid Works, Catia i innych (Jackowski, 2013; Przybylski i in., 2007). Metodę przekształcania krzywych Béziera w krzywe B-sklejane do pomiarów powierzchni stosowanych w obrabiarkach sterowanych numerycznie zaproponowali Kawalec i Magdziak (2011). Dworecki i in. (2012) zaproponowali metodę umożliwiającą wizualizację linii przenikania brył w rzucie na wybraną rzutnię. Reclik i Koc (2008) dostrzegają konieczność opracowania modułu programowania off-line robotów przemysłowych opartego na przestrzennych krzywych B-sklejanych. Dokładność odwzorowania obiektów o dużych zniekształceniach zwiększa stosowanie funkcji sklejanych w zapisie parametrycznym oraz właściwy dobór warunków brzegowych i funkcji aproksymacyjnych (Lenda, 2006, 2008, 2010; Lenda i Mirek, 2013). Kolejnym narzędziem stosowanym w modelowaniu matematycznym jest formuła „superquadric”. Biegelbauer i Vincze (2007) opracowali metodę skutecznego wykrywania obiektów 3D skanowanych laserem przez dopasowanie formuły „superquadrics”. Proponowana metoda znajduje zastosowanie przy automatyzowaniu wykrywania kształtów obiektów występujących w rzeczywistym otoczeniu i może być pomocna przy realizacji wykrywania uszkodzeń wyrobów na liniach produkcyjnych. „Superquadrics” to zbiór parametrycznych krzywych, które są wykorzystywane do modelowania zróżnicowanych pod względem kształtu przedmiotów, (Zhou i Kambhamettu, 2000). „Superquadrics” zostało dobrze zbadane, nawet w zakresie odkształceń (Sitko i Szczeńniak, 2014). Formuła ta jest stosowana do opisu części modeli objętościowych, które mają duże znaczenie podczas operacji chwytania uchwytyami manipulatorów robotów (Katsoulas i Jaklič, 2002). Proces dopasowania następuje wówczas, gdy punkty znane z modelu 3D należą do części biorących udział w procesie roboczym (Sven i in., 1997). Ramamoorthi i Arvo (2015) zaproponowali nowe podejście do tworzenia modeli z obrazów i innych przybliżonych rzeczywistych obiektów z wykorzystaniem danych pochodzących z różnych technik akwizycji. Dużo ciekawych kształtów powierzchni do zastosowania w modelowaniu naczyń prezentują w swojej pracy Călin-Șerban Bărbat (2005).

## Cel badań

Celem pracy jest opis matematyczny modelu 3D kształtu pater do owoców, tortów i ciastek za pomocą powierzchni obrotowych.

**Materiał i metoda****Założenia do modeli 3D pater do owoców, tortów i ciastek**

Parametr występujący w wielomianach trzeciego stopnia jest zapisany w formule 1:

$$\theta_j = \frac{j}{N} \quad (1)$$

gdzie:

$$0 \leq \theta \leq 1$$

Kąty obrotu punktów w płaszczyźnie  $XY$  układu współrzędnych zapisano równaniami 2 i 3:

$$\alpha_j = \frac{2 \cdot \pi \cdot j}{N} \quad (2)$$

$$\beta_i = \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{N} \quad (3)$$

Rozmiar macierzy, w których zapisane są współrzędne punktów modelowanych powierzchni zapisuje się następująco:

$$i = 0 \dots N \quad (4)$$

$$j = 0 \dots N \quad (5)$$

gdzie:

$N$  – rozmiar macierzy (przyjęto  $N = 50$ ),

$i$  – liczba wierszy,

$j$  – liczba kolumn.

Podstawowe wymiary modelowanej patery do owoców są następujące: średnica miski wynosi  $d_m = 330$  mm, średnica stopki  $d_{so} = 150$  mm, wysokość patery  $h_{po} = 123$  mm. Podstawowe wymiary modelowanej patery do tortów i ciastek są następujące: średnica talerza  $d_t = 330$  mm, średnica stopki  $d_{st} = 156$  mm, wysokość patery  $h_{pt} = 104$  mm.

**Opis metody modelowania patery do owoców**

Wartości współczynników wielomianów trzeciego stopnia reprezentujące krzywe pierwszego i drugiego konturu stopki patery oraz konturu miski patery, decydujące o ich kształcie, zamieszczono w macierzy 6:

$$\begin{bmatrix} ApoS & ApoS3 & ApoM1 \\ BpoS & BpoS3 & BpoM1 \\ CpoS & CpoS3 & CpoM1 \\ DpoS & DpoS3 & DpoM1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 & 30 & 1 \\ -160 & 45 & 1 \\ 30 & 18 & 1 \\ 565 & 0 & 60,55 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Wartości parametrów skalujących oraz położenia krzywych pierwszego i drugiego konturu stopki patery oraz konturu miski patery zamieszczono w macierzy 7:

$$\begin{bmatrix} apoS & bpoS4 & dpoS3 \\ apoS3 & bpoM1 & dpoM1 \\ apoS4 & bpoM2 & epoS \\ apoM1 & cpoS4 & epoS3 \\ apoM2 & dpoS & epoM1 \\ kpoS & kpoS3 & epoM2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 1,4 & 50 \\ 15 & 82 & 33 \\ 75 & 1 & 40,5 \\ 46 & -3 & 35 \\ 165 & 120 & 0,7 \\ 40 & 5 & 122 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Wielomian trzeciego stopnia reprezentujący krzywą pierwszego konturu stopki patery ma postać:

$$EpoS_j = ApoS \cdot (1 - \theta_j)^3 + BpoS \cdot 3 \cdot \theta_j \cdot (1 - \theta_j)^2 + CpoS \cdot 3 \cdot (\theta_j)^2 \cdot (1 - \theta_j) + DpoS \cdot (\theta_j)^3 \quad (8)$$

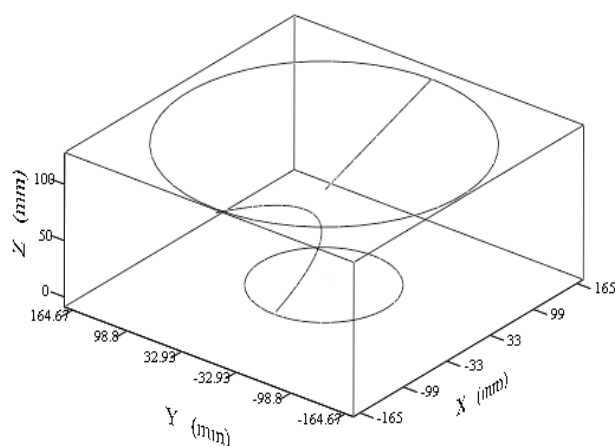
Wielomian trzeciego stopnia reprezentujący krzywą drugiego konturu stopki patery ma postać:

$$EpoS3_j = ApoS3 \cdot (1 - \theta_j)^3 + BpoS3 \cdot 3 \cdot \theta_j \cdot (1 - \theta_j)^2 + CpoS3 \cdot 3 \cdot (\theta_j)^2 \cdot (1 - \theta_j) + DpoS3 \cdot (\theta_j)^3 \quad (9)$$

Wielomian trzeciego stopnia reprezentujący krzywą konturu miski patery ma postać:

$$EpoM1_j = ApoM1 \cdot (1 - \theta_j)^3 + BpoM1 \cdot 3 \cdot \theta_j \cdot (1 - \theta_j)^2 + CpoM1 \cdot 3 \cdot (\theta_j)^2 \cdot (1 - \theta_j) + DpoM1 \cdot (\theta_j)^3 \quad (10)$$

Krzywe 3D służące do modelowania kształtu patery do owoców zamieszczono na rysunku 1.



Rys. 1. Krzywe patery do owoców

Fig. 1. Curves of centerpieces to fruit

Powierzchnię boczną ścianki miski patery zapisano w postaci trzech następujących równań parametrycznych:

$$Xo2_{i,j} = apoM2 \cdot \cos(\alpha_j) \quad (11)$$

$$Yo2_{i,j} = apoM2 \cdot \sin(\alpha_j) \quad (12)$$

$$Zo2_{i,j} = bpoM2 \cdot \cos(\beta_i) + cpoM2 \quad (13)$$

Powierzchnię boczną ścianki stopki patery zapisano w postaci trzech następujących równań parametrycznych:

$$Xo4_{i,j} = apoS4 \cdot \cos(\alpha_j) \quad (14)$$

$$Yo4_{i,j} = apoS4 \cdot \sin(\alpha_j) \quad (15)$$

$$Zo4_{i,j} = bpoS4 \cdot \cos(\beta_i) + cpoS4 \quad (16)$$

Powierzchnia pierwsza stopki patery została utworzona przez obrót krzywej (8) względem osi X, Y, Z układu współrzędnych, którą zapisano w postaci następujących trzech równań parametrycznych:

$$Xo_{i,j} = apoS \cdot \frac{\cos(\beta_i) \cdot EpoS_j}{N - dpoS \cdot \frac{kpoS}{epoS}} \quad (17)$$

$$Yo_{i,j} = apoS \cdot \frac{\sin(\beta_i) \cdot EpoS_j}{N - dpoS \cdot \frac{kpoS}{epoS}} \quad (18)$$

$$Zo_{i,j} = dpoS \cdot \frac{j}{N} \quad (19)$$

Powierzchnię drugą stopki patery utworzona przez obrót krzywej (9) względem osi X, Y, Z układu współrzędnych zapisano w postaci następujących trzech równań parametrycznych:

$$Xo3_{i,j} = apoS3 \cdot \frac{\cos(\beta_i) \cdot EpoS3_j}{N - dpoS3 \cdot \frac{kpoS3}{epoS3}} \quad (20)$$

$$Yo3_{i,j} = apoS3 \cdot \frac{\sin(\beta_i) \cdot EpoS3_j}{N - dpoS3 \cdot \frac{kpoS3}{epoS3}} \quad (21)$$

$$Zo3_{i,j} = fpoS3 + \frac{dpoS3 \cdot j}{kpoS3 \cdot N} \quad (22)$$

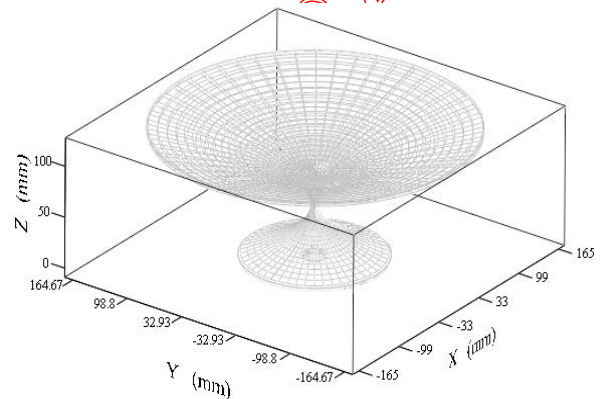
Powierzchnię miski patery utworzono przez obrót krzywej (10) względem osi X, Y, Z układu współrzędnych i zapisano w postaci trzech następujących równań parametrycznych:

$$Xo1_{i,j} = apoM1 \cdot \frac{\cos(\beta_i) \cdot EpoM1_j}{N - dpoM1} \quad (23)$$

$$Yo1_{i,j} = apoM1 \cdot \frac{\sin(\beta_i) \cdot EpoM1_j}{N - dpoM1} \quad (24)$$

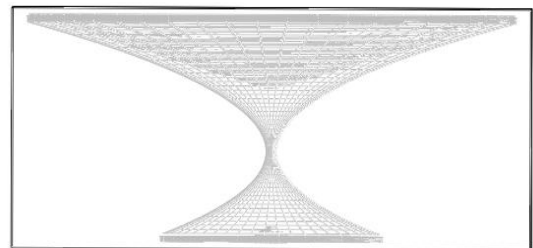
$$Zo1_{i,j} = bpoM1 + \frac{epoM1 \cdot EpoM1_j}{N - dpoM1} \quad (25)$$

Na rysunku 2 przedstawiono model 3D patery do owoców, a na rysunku 3 rzut na płaszczyznę XZ układu współrzędnych.



Rys. 2. Model 3D patery do owoców

Fig. 2. 3D Model of centrepieces to fruit



Rys. 3. Rzut na płaszczyznę XZ modelu 3D patery do owoców

Fig. 3. Throw on XZ plane 3D model of centrepieces to fruit

### Opis metody do modelowania patery do tortów i ciastek

Wartości współczynników wielomianów trzeciego stopnia reprezentujące krzywe pierwszego i drugiego konturu stopki patery oraz pierwszego i drugiego konturu talerza patery do tortów i ciastek, wpływających na ich kształty, zamieszczono w macierzy 26:

$$\begin{bmatrix} AptS & AptS4 & AptT1 & AptT2 \\ BptS & BptS4 & BptT1 & BptT2 \\ CptS & CptS4 & CptT1 & CptT2 \\ DptS & DptS4 & DptT1 & DptT2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130 & 30 & 1 & 1 \\ -40 & 45 & 1 & 1 \\ -20 & 18 & 1 & 1 \\ 190 & 0 & 60,55 & 60,55 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Wartości parametrów skalujących oraz położenia krzywych pierwszego i drugiego konturu stopki patery oraz pierwszego i drugiego konturu talerza patery zamieszczono w macierzy:

$$\begin{bmatrix} aptS & bpt3 & eptS \\ aptS4 & bPS5 & eptS4 \\ aptS5 & cptT3 & eptT1 \\ apT1 & cptS5 & kptS \\ apT2 & dptS & kptS4 \\ apT3 & dptS4 & kptS4a \\ bptT1 & dptT1 & kpT2 \\ bptT2 & dptT2 & fptS4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 3,4 & 40,5 \\ 16 & 2 & 35 \\ 78 & -2,2 & 0,7 \\ 45,5 & 102 & 40 \\ 45,5 & 100 & 40 \\ 165 & 50 & 5 \\ 100 & 100 & 3 \\ 0 & 100 & 105 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Wielomian trzeciego stopnia reprezentujący krzywą pierwszego konturu stopki patery ma postać:

$$\begin{aligned} EptS_j &= AptS \cdot (1-\theta_j)^3 + BptS \cdot 3 \cdot \theta_j \cdot (1-\theta_j)^2 + \\ &+ CptS \cdot 3 \cdot (\theta_j)^2 \cdot (1-\theta_j) + DptS \cdot (\theta_j)^3 \end{aligned} \quad (28)$$

Wielomian trzeciego stopnia reprezentujący krzywą drugiego konturu stopki patery ma postać:

$$\begin{aligned} EptS4_j &= AptS4 \cdot (1-\theta_j)^3 + BptS4 \cdot 3 \cdot \theta_j \cdot (1-\theta_j)^2 + \\ &+ CptS4 \cdot 3 \cdot (\theta_j)^2 \cdot (1-\theta_j) + DptS4 \cdot (\theta_j)^3 \end{aligned} \quad (29)$$

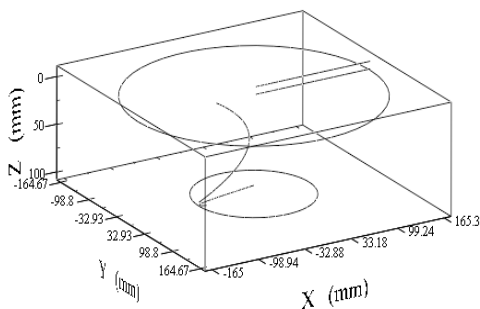
Wielomian trzeciego stopnia reprezentujący pierwszą krzywą konturu talerza patery ma postać:

$$\begin{aligned} EptT1_j &= AptT1 \cdot (1-\theta_j)^3 + BptT1 \cdot 3 \cdot \theta_j \cdot (1-\theta_j)^2 + \\ &+ CptT1 \cdot 3 \cdot (\theta_j)^2 \cdot (1-\theta_j) + DptT1 \cdot (\theta_j)^3 \end{aligned} \quad (30)$$

Wielomian trzeciego stopnia reprezentujący drugą krzywą konturu talerza patery ma postać:

$$\begin{aligned} EptT2_j &= AptT2 \cdot (1-\theta_j)^3 + BptT2 \cdot 3 \cdot \theta_j \cdot (1-\theta_j)^2 + \\ &+ CptT2 \cdot 3 \cdot (\theta_j)^2 \cdot (1-\theta_j) + DptT2 \cdot (\theta_j)^3 \end{aligned} \quad (31)$$

Krzywe 3D służące do modelowania kształtu patery do tortów i ciastek zamieszczono na rysunku 4.



Rys. 4. Krzywe patery do tortów i ciastek

Fig. 4. Curves centrepieces to cakes and pastries

Powierzchnię boczną ścianki talerza patery zapisano w postaci trzech równań parametrycznych:

$$Xt3_{i,j} = aptT3 \cdot \cos(\alpha_j) \quad (32)$$

$$Yt3_{i,j} = aptT3 \cdot \sin(\alpha_j) \quad (33)$$

$$Zt3_{i,j} = bptT3 \cdot \cos(\beta_i) + cptT3 \quad (34)$$

Powierzchnię boczną ścianki stopki patery zapisano w postaci trzech równań parametrycznych:

$$Xt5_{i,j} = aptS5 \cdot \cos(\alpha_j) \quad (35)$$

$$Yt5_{i,j} = aptS5 \cdot \sin(\alpha_j) \quad (36)$$

$$Zt5_{i,j} = bptS5 \cdot \cos(\beta_i) + cptS5 \quad (37)$$

Powierzchnię pierwszą stopki patery utworzono przez obrót krzywej (28) względem osi X, Y, Z układu współrzędnych i zapisano w postaci trzech równań parametrycznych:

$$Xt_{i,j} = aptS \cdot \frac{\cos(\beta_i) \cdot EptS_j}{N - dptS \cdot \frac{kptS}{eptS}} \quad (38)$$

$$Yt_{i,j} = aptS \cdot \frac{\sin(\beta_i) \cdot EptS_j}{N - dptS \cdot \frac{kptS}{eptS}} \quad (39)$$

$$Zt_{i,j} = dptS \cdot \frac{j}{N} \quad (40)$$

Powierzchnię drugą stopki patery utworzono przez obrót krzywej (29) względem osi X, Y, Z układu współrzędnych i zapisano w postaci trzech równań parametrycznych:

$$Xt4_{i,j} = aptS4 \cdot \frac{\cos(\beta_i) \cdot EptS4_j}{N - dptS4 \cdot \frac{kptS4}{eptS4}} \quad (41)$$

$$Yt4_{i,j} = aptS4 \cdot \frac{\sin(\beta_i) \cdot EptS4_j}{N - dptS4 \cdot \frac{kptS4}{eptS4}} \quad (42)$$

$$Zt4_{i,j} = fptS4 - \frac{dptS4}{kptS4a3} \cdot \frac{j}{N} \quad (43)$$

Powierzchnię pierwszą talerza patery utworzono przez obrót krzywej (30) względem osi  $X, Y, Z$  układu współrzędnych, którą zapisano w postaci trzech równań parametrycznych:

$$Xt1_{i,j} = aptT1 \cdot \frac{\cos(\beta_i) \cdot EptT1_j}{N - \frac{dptT1}{kptT1}} \quad (44)$$

$$Yt1_{i,j} = aptT1 \cdot \frac{\sin(\beta_i) \cdot EptT1_j}{N - \frac{dptT1}{kptT1}} \quad (45)$$

$$Zt1_{i,j} = bptT1 \quad (46)$$

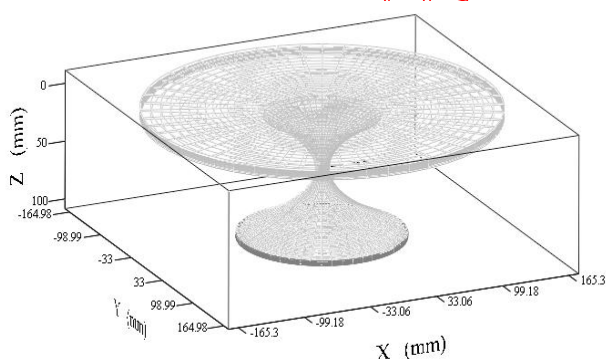
Powierzchnię drugą talerza patery utworzono przez obrót krzywej (31) względem osi  $X, Y, Z$  układu współrzędnych i zapisano w postaci trzech równań parametrycznych:

$$Xt2_{i,j} = aptT2 \cdot \frac{\cos(\beta_i) \cdot EptT2_j}{N - \frac{dptT2}{kptT2}} \quad (47)$$

$$Yt2_{i,j} = aptT2 \cdot \frac{\sin(\beta_i) \cdot EptT2_j}{N - \frac{dptT2}{kptT2}} \quad (48)$$

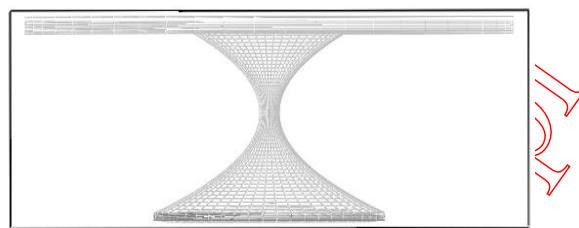
$$Zt2_{i,j} = bptT2 \quad (49)$$

Na rysunku 5 przedstawiono model 3D patery do tortów i ciastek, a na rysunku 6 jego rzut na płaszczyznę  $XZ$  układu współrzędnych.



Rys. 5. Model 3D patery do tortów i ciastek

Fig. 5. 3D model centrepieces to cakes and pastries



Rys. 6. Rzut na płaszczyznę  $XZ$  model 3D patery do tortów i ciastek

Fig. 6. Throw on  $XZ$  plane 3D model of centrepieces to cakes and pastries

## Podsumowanie

Problem matematycznego modelowania kształtu różnorodnych obiektów występujących w otaczającej rzeczywistości jest zagadnieniem rozległym, wymagającym ciągłego poszukiwania nowych zastosowań i doskonalenia znanych już metod obliczeniowych. Projektant współcześnie pracujący nad nową oryginalną koncepcją modelowanego kształtu pater, korzystając z proponowanego modelu matematycznego, ma możliwość zmiany parametrów geometrycznych pater uzyskując ich wirtualny obraz 3D. Macierzowy zapis współrzędnych wierzchołków siatki ułożonych na modelowanych powierzchniach, po ich złożeniu, daje dyskretny obraz modelu 3D projektowanego obiektu (np. patery). Proponowana metoda matematycznego modelowania kształtu na przykładzie pater do owoców oraz tortów i ciastek jest narzędziem wspomagającym projektantów w poszukiwaniu nowych oryginalnych kształtów naczyń stołowych. Naczynia stołowe charakteryzujące się symetrią kształtu mogą być modelowane za pomocą powierzchni obrotowych uzyskiwanych przez obrót krzywej o założonym kształcie.

## Bibliografia

- Bany-Kozłowska, J., Amborska, D. (2011). *Zestaw naczyń stołowych z podgrzewaczem*. Urząd Patentowy Rzeczypospolitej Polskiej. Numer zgłoszenia: 15965. Opis Ochronny Wzoru Przemysłowego. WUP 01/2011. Uprawniony z rejestracji wzoru przemysłowego: Zakłady Ceramiczne "BOLESŁAWIEC" w Bolesławcu S. z.o.o. (PL).
- Biegelbauer, G., Vincze, M. (2007). Efficient 3D object detection by fitting superquadrics to range image data for robot's object manipulation. *IEEE International Conference on Robotics and Automation Roma*, 1086 - 1091.
- Boac, J.M., Casada, M.E., Maghirang, R.G., Harner, J.P. (2010). Material and interaction properties of selected grains and oilseeds for modeling discrete particles. *Transactions of the ASABE*, 53(4), 1201-1216.
- Călin-Șerban, B. (2005). Examples of Bézier-Surfaces of Revolution. *Journal for Geometry and Graphics*, 9(1), 1 - 9.
- Cășandriou, T., Mieila, C. (2010). Theoretical development of a mathematical model to evaluate gravimetric flow rate of seeds through orifices. *University Politehnica of Buchrest Scientific, Serials D*, 72(4), 269-280.

- Dems, K., Radaszewska, E. (2008). Optymalne projektowanie konstrukcji kompozytowej obciążonej termicznie z wykorzystaniem algorytmu gradientowego. *Modelowanie Inżynierskie*, 4(35), 7 - 14.
- Dłubakowska – Puzio, E., Karpuk, M., Puzio, K. (2010). koncepcja wykorzystania modeli ekonometrycznych w kształtowaniu postaw pro konsumenckich w obiektach hotelowych o charakterze sanatoryjnym w Kołobrzegu. *Scientific Journals*, 3(52), 92 - 101.
- Dworecki, Z., Fiszer, A., Łoboda, M., Jakubowski, W. (2012). Dynamiczna wizualizacja wspomagająca rozwiązywanie wybranych zagadnień przestrzennych. *Journal of Research and Applications in Agricultural Engineering*, 57(2), 65 - 68.
- Foley, J.D., van Dam, A., Feiner, S.K., Hughes, J.F., Phillips, R.L., (1995). *Wprowadzenie do grafiki komputerowej*. Warszawa: WNT, ISBN 83-204-2662-6.
- Gheribi, E. (2013). Uwarunkowania rozwoju przedsiębiorstw gastronomicznych w Polsce. *Marketing i Rynek*, 4, 29 - 35.
- Geffroy, E. 1996. *Clienting*. Warszawa: Agencja Wydawnicza Placet, 42, ISBN 83-85428-16-X.
- Hebisz, T. (2002). *Krzywe Beziera. Multimedia i grafika komputerowa*. Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych. <http://pro-car.org/sieci-komp/inne-materialy/graf-Bezier.pdf>, dostęp: 03.12.2015.
- Inspirujące dekoracje*. Katalog. VOX. Tak chcę mieszkać! [www.vox.pl](http://www.vox.pl), dostęp: 03.12.2015.
- Jackowski, B. (2013). Typografowie, programiści i matematycy, czyli przypadek estetycznie zadowolającej interpolacji. [http://www.cobrpp.com.pl/actapoligraphica/uploads/pdf/AP2013\\_01\\_Jackowski.pdf](http://www.cobrpp.com.pl/actapoligraphica/uploads/pdf/AP2013_01_Jackowski.pdf), dostęp: 03.12.2015
- Januszkiewicz, K. (2012). O przestrzeni cyfrowej i nie tylko. *Archivolta* 2, 48-55.
- Juhász, I. (2000). Computing volume of solids bounded by Bézier surfaces. *Mathematical Notes, Miskolc*, 1(2), 127 - 133.
- Katalog dla profesjonalnej gastronomii*. [www.segros.pl](http://www.segros.pl), dostęp: 03.12.2015.
- Katsoulas, D., Jaklič, A. (2002). Fast recovery of piled deformable objects using superquadrics. *Lecture Notes in Computer Science*, 2449, 174-181.
- Kawalec, A., Magdziak, M. (2011). An influence of the number of measurement points on the accuracy of measurements of free-form surfaces on CNC machine tool. *Advances in Manufacturing Science and Technology*, 35(2), 17 - 27.
- Kiciak, P. (2002). Blossoming. XXVIII Szkoła Matematyki Poglądowej „Pomysły”, Grzegorzewice.
- Kiciak, P. (2005). *Podstawy modelowania krzywych i powierzchni*. Warszawa: WNT, ISBN 83-204-2464-X.
- Lenda, G. (2006). Metody tworzenia i modyfikacji funkcji sklepanych na potrzeby opisu kształtu obiektów obserwowanych punktowo. *Geodezja*, 12(2/1), 277 - 291.
- Lenda, G. (2008). The application of least-squares method for approximating the surfaces of engineering structures. *Geometrics and Environmental Engineering*, 2(1), 49 - 58.
- Lenda, G. (2010). An algorithm for uniform scanning of coating buildings modeled with spline functions. *Geometrics and Environmental Engineering*, 4(1), 45 - 56.
- Lenda, G., Mirek, G. (2013). Parametrization of spline functions to describe the shape of shell structures. *Geometrics and Environmental Engineering*, 7(1), 65 - 73.
- Lipianin-Zontek, E., Zontek, Z. (2010). Zarządzanie relacjami z klientami ze szczególnym uwzględnieniem branży turystycznej. *Scientific Journals*, 3(52), 102 - 112.
- Mieszkalski, L. (2014). Bézier curves in modeling the shapes of biological objects. *Annals of Warsaw University of Life Sciences - SGGW, Agriculture (Agricultural and Forest Engineering)*, 64, 117 -128.
- Milewska, E. (2007). Zastosowanie integracji danych systemowych w procesie planowania i sterowania produkcją na przykładzie fabryki naczyń kamionkowych. *Ekonomika i Organizacja Przedsiębiorstwa. Konferencja: Systemy Wspomagania w Zarządzaniu Środowiskiem*. Słowacja, Terchova. [http://www.ptzp.org.pl/files/konferencje/kzz/artypdf\\_2011/073.pdf](http://www.ptzp.org.pl/files/konferencje/kzz/artypdf_2011/073.pdf), dostęp: 03.12.2015.
- Przybylski, W., Deja, M. (2007). *Komputerowo wspomagane wytwarzanie maszyn. Podstawy i zastosowanie*. Warszawa: WNT. ISBN 978-83-204-3296-1.
- Rabut, C. (2002). On Pierre Bézier's life and motivations. Mini-review. *Computer-Aided Design*, 34, 493 - 510, [www.elsevier.com/locate/cad](http://www.elsevier.com/locate/cad), dostęp: 03.12.2015.
- Ramamoorthi, R., Arvo, J. (2015). Creating Generative Models from Range Images <http://cseweb.ucsd.edu/~ravir/papers/invgen/paper.pdf>, dostęp: 6.12.2015.
- Reclik, D., Kost, G.G. (2008). Dynamiczne planowanie trajektorii robotów manipulacyjnych. *Przegląd Mechaniczny*, LXVII(1), 23 - 29.
- Rzasa, W. (2007). Opakowania szklane. Przegląd najważniejszych zalet i korzyści. [W:] *Szkló i ceramika*, 58(5), 19 - 21.
- Sitko, J., Szcześniak, B. (2014). Struktura niezgodności i ważność rodzajów kontroli wizualnej podczas produkcji opakowań szklanych. *Systemy Wspomagania w Inżynierii Produkcji. Jakość i Bezpieczeństwo*, ISBN 978-83-940150-1-5.
- Soltani, M., Alimardani, R., Omid, M. (2010). A New mathematical modeling of banana fruit and comparison with actual values of dimensional properties. *Modern Applied Science*, 4(8), 104-113.
- Sven, J., Dickinson, S. J., Metaxas, D., Pentland, A. (1997). The role of model-based segmentation in the recovery of volumetric parts from range data. *IEEE Transactions On Pattern Analysis And Machine Intelligence*, 19(3), 259 - 267.
- Tworzymy piękno. Katalog. Jakość Roku*. (2010). [www.hefra.pl](http://www.hefra.pl), dostęp: 03.12.2015.
- Wąsikowski, E., Wąsikowski, D. (2012). *Patera*. Urząd Patentowy Rzeczypospolitej Polskiej. Numer zgłoszenia: 18106. Opis Ochronny Wzoru Przemysłowego. WUP 04/2012. Uprawniony z rejestracji wzoru przemysłowego: VITRONEX S. z.o.o. (PL).
- Wei-long, D., Yu-Ping, Z., Qian-Yuan, Z., De-feng, Z., (2011). Realistic simulation of rice plant. *Rice Science*, 18(3), 224-230.
- Wybieralski, W. (2012). *Elementy wzornictwa w projektowaniu technicznym*. Warszawa: Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, ISBN 83-89703-96-3.

Zabrocki, R., Cordice, A. (2010). Analiza porównawcza zachowań konsumentów polskich i angielskich na rynku usług żywieniowych. *Zeszyty Naukowe Akademii Morskiej w Gdyni*, 65, 31 - 39.

Zhou, L., Kambhamettu, C. (2000). Extending Superquadrics with Exponent Functions: *Modeling and Reconstruction. Graphical Models*, 1 – 20, [DOI:10.1006/gmod.2000.0529](https://doi.org/10.1006/gmod.2000.0529).

Ziomba, B. (2001). Przemysł szklarski na progu XXI wieku. *Szkło i ceramika*, 59(4), 32 – 39.

**Leszek Mieszkalski**

Katedra Organizacji i Inżynierii Produkcji  
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie  
e-mail: [leszek\\_mieszkalski@sggw.pl](mailto:leszek_mieszkalski@sggw.pl)

pobrano z [www.ips.wm.tu.koszalin.pl](http://www.ips.wm.tu.koszalin.pl)